Problema sobre ecuaciones simultáneas 1.

Dado el modelo:

$$Y_{1t} = a_1 Y_{2t} + a_2 X_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = b_1 Y_{1t} + b_2 X_{1t} + b_3 X_{3t} + u_{2t}$$

Con información de las sumas de los productos cruzados:

	Y_{1t}	Y_{2t}	X_{1t}	X_{2t}	X_{3t}
Y_{1t}	3.2	4	3	2	2
Y_{2t}	4	5	1	4	2
X_{1t}	3	1	1	0	0
X_{2t}	2	4	0	2	0
X_{3t}	2	2	0	0	1

Se pide:

a) Identificar cada una de las ecuaciones del modelo.

b) Explicar cuál método escogería para la estimación de los parámetros en cada una de las ecuaciones, de entre: mínimos cuadrados ordinarios (MCO), mínimos cuadramos indirectos (MCI) y mínimos cuadrados en dos etapas (MC2E) basado en las propiedades estadísticas de las estimaciones.

c) Estimar la forma reducida.

d) Estimar los parámetros de ambas ecuaciones por los métodos anteriormente elegidos.

Solución

a) Para identificar el modelo crearemos la matriz A formada por los parámetros estructurales del modelo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & b_1 \\ a_1 & -1 \\ 0 & b_2 \\ a_2 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

Puesto que solamente hay restricciones de nulidad podemos aplicar el método de la forma estructural.

En el modelo hay 2 variables endógenas (g) y 3 variables predeterminadas (k). El número de variables excluidas en la primera ecuación es dos (e_1) y el de la segunda ecuación es una (e_2)

Primera ecuación.

Método del rango: $\rho(A_1) = \rho\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 1 = g-1$ ecuación identificada

Método del orden: $e_1 = 2 > g-1$ ecuación sobreidentificada

Por tanto, la primera ecuación por estar identificada por el método del rango y sobreidentificada por el método del orden, diremos que dicha ecuación está sobreidentificada.

Segunda ecuación.

Método del rango: $\rho(A_2) = \rho\left[a_2\right] = 1 = g-1$ ecuación identificada

Método del orden: $e_2 = 1 = g-1$ ecuación exactamente identificada

Por tanto, la segunda ecuación por estar identificada por el método del rango y exactamente por el método del orden, diremos que dicha ecuación está exactamente identificada.

b) Para la elección del método de estimación de los parámetros nos fijamos en lo obtenido en el anterior apartado.

Para la primera ecuación por estar sobreidentificada no se puede emplear MCI y de los dos métodos restantes MCO y MC2E, que son ambos sesgados, sólo MC2E es consistente, por tanto escogemos este último como método para la estimación de los parámetros de la ecuación.

En la segunda ecuación, por estar exactamente identificada, se puede emplear MCI, MCO y MC2E, dado que los tres son sesgados, pero sólo son consistentes MCI y MC2E MCO se vuelve a descartar, de entre los que quedan y sabiendo que el resultado que se obtendrá será el mismo por ambos métodos, parece razonable escoger MCI ya que resulta más sencillo de aplicar.

c) Estimación de la forma reducida.

Comenzaremos estimando por MCO los parámetros del modelo reducido.

$$\hat{\Pi} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto la estimación de la forma reducida será:

$$\hat{Y}_{1t} = 3X_{1t} + X_{2t} + 2X_{3t}$$
$$\hat{Y}_{2t} = X_{1t} + 2X_{2t} + 2X_{3t}$$

d) Ahora vamos a estimar el modelo por los métodos elegidos.

1. En primer lugar vamos a estimar la primera ecuación del modelo por MC2E.

La expresión matricial del estimador MC2E es:

$$\hat{\delta}_{h,MC2E} = (\hat{Z}'_1 \hat{Z}_1)^{-1} \hat{Z}'_1 Y_1 \quad \text{con} \quad \hat{Z}_1 = (\hat{Y}_2 \; X_2)$$

Y donde $\hat{Y}_2$ es la estimación obtenida en el apartado anterior.

$\hat{Z}'_1 \hat{Z}_1$	$\hat{Y}_2$	X_2
$\hat{Y}'_2$	13	4
X'_2	4	2

$$\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.4 & 1.3 \end{bmatrix}$$

$\hat{Z}'_1 Y_1$	Y_1
$\hat{Y}'_2$	11
X'_2	2

De donde:

$$\hat{\delta}_{h,MC2E} = (\hat{Z}'_1 \hat{Z}_1)^{-1} \hat{Z}'_1 Y_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.4 & 1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ -1.8 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\hat{Y}_{1t} = 1.4Y_{2t} - 1.8X_{2t}$$

2. Ahora estimaremos por MCI la segunda ecuación del modelo.

Para ello basta con resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

De esta forma se obtiene la estimación para la segunda ecuación:

$$\hat{Y}_{2t} = 2Y_{1t} - 5X_{1t} - 2X_{3t}$$